# การเปรียบเทียบค่าของจำนวน $\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}$ กับ $e^{\left[\pi^{e}\right]^n}$ และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}}$ กับ $\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^n}}$

# The Comparison of Values of the Numbers $\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}$ Versus $e^{\left[\pi^{e}\right]^n}$ and $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}}$ Versus $\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^n}}$

ชนิตา เรืองกิจไพบูลย์ และ รณสรรพ์ ชินรัมย์*

Chanita Ruangkitphaiboon and Ronnason Chinram *

Received: 6 July 2017, Revised: 17 May 2018, Accepted: 3 May 2019

## บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เกิดจากการที่ผู้วิจัยได้ศึกษาบทพิสูจน์การเปรียบเทียบค่าของ $e^{\pi}$ และ $\pi^{e}$ โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์พิสูจน์โดยไม่ได้ใช้การคำนวณค่า ซึ่งจากการค้นคว้าพบว่าได้มีผู้ค้นพบและมีการพิสูจน์แล้ว ได้ว่า $e^{\pi} > \pi^{e}$

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการเปรียบเทียบค่าของ $\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}$ กับ $e^{\left[\pi^{e}\right]^n}$ และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}}$ กับ $\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^n}}$ โดยใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า ในกรณีที่จำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคู่พบว่าค่าของ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^n}}$ แต่ในกรณีที่จำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคี่พบว่า $\pi^{\left[e^{\pi}\right]^n} > e^{\left[\pi^{e}\right]^n}$ ยิ่งกว่านั้น ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของผลการวิจัยที่เกิดขึ้นด้วย

**คำสำคัญ:** กำลัง, $e$, $\pi$

---

หน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อำเภอหาดใหญ่ จังหวัดสงขลา 90110

Algebra and Applications Research Unit, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Hat Yai, Songkhla 90110, Thailand.

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (Corresponding author, e-mail): ronnason.c@psu.ac.th

## ABSTRACT

This research is based on the fact that researchers have studied the proofs of the comparison of the values of $e^{\pi}$ and $\pi^{e}$ by using the mathematical proof, without calculating them. It was proved that $e^{\pi} > \pi^{e}$. In this study, researchers compare the values of $\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}$ versus $e^{\left[\pi^{e}\right]_n}$ and $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}$ versus $\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}$ by using the mathematical proof. We show that if the number of exponents is even, then $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}$ is greater than $\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}$. On the other hand, if the number of exponents is odd, we obtained $\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}$ is greater than $e^{\left[\pi^{e}\right]_n}$. Moreover, researchers analyze the results of this research.


**Key words:** power, $e$, $\pi$

## บทนำ

ค่า $\pi$ เป็นค่าคงตัวที่เกิดจากความยาวเส้นรอบรูปวงกลมหารด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม ค่า $\pi$ เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 3.14 และ ค่า $e$ เป็นค่าคงตัวซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 2.71

เมื่อดูจากค่าของ $\pi$ และค่าของ $e$ จะสังเกตได้ว่าค่าของ $e^{\pi}$ และ $\pi^{e}$ จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก จึงเกิดการตั้งปัญหาว่าค่าของ $e^{\pi}$ และค่าของ $\pi^{e}$ ค่าใดมีค่ามากกว่ากัน

ผู้วิจัยได้ศึกษาบทพิสูจน์ในการเปรียบเทียบค่าของ $e^{\pi}$ และ $\pi^{e}$ ซึ่งปัญหาดังกล่าวได้มีผู้ค้นพบและมีการพิสูจน์ไว้หลายวิธี ซึ่งสามารถดูรายละเอียดได้ใน (Schaumberger, 1985; Nakhli, 1987; Talwalkar, 2013; Mirzodaler, 2016) ในงานวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยเพียงต้องการนำเสนอวิธีการพิสูจน์ในอีกรูปแบบหนึ่งเท่านั้น ผู้วิจัยได้ค้นคว้าพบว่ามีการพิสูจน์ได้ว่า $e^{\pi} > \pi^{e}$ ซึ่งมีความน่าสนใจเนื่องจากได้นำความรู้ของแคลคูลัสมาช่วยในการพิสูจน์ ดังทฤษฎีบท 1

ทฤษฎีบท 1: $e^{\pi} > \pi^{e}$

บทพิสูจน์ ให้ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

พบว่า $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}<0$ สำหรับทุกค่า $x>e$

จึงได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุกค่า $x \geq e$

เนื่องจาก $\pi > e$ จะได้ว่า $f(\pi)<f(e)$

นั่นคือ $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln e}{e}$ ดังนั้น $e\ln\pi<\pi\ln e$

จากสมบัติของลอการิทึมทำให้ได้ว่า $\ln\pi^{e}<\ln e^{\pi}$

ซึ่งทำให้ได้ $e^{\pi}>\pi^{e}$ ตามต้องการ

จากการใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่าของจำนวนดังกล่าวเพื่อตรวจสอบ โดยพิจารณาทศนิยม 2 ตำแหน่ง พบว่า $e^{\pi}$ มีค่าประมาณ 23.14 และ $\pi^{e}$ มีค่าประมาณ *22.46* ซึ่งได้ว่า $e^{\pi}>\pi^{e}$

ผู้วิจัยจึงเกิดคำถามต่อมาว่า $e^{\pi^e}$ และ $\pi^{e^\pi}$ หรือถ้ามีการยกกำลังของ $e$ และ $\pi$ สลับกัน โดยมีฐานเริ่มต้นที่ $e$ และ $\pi$ ใครมีค่ามากกว่ากัน ซึ่งผู้วิจัยพยายามลองใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่า พบว่าไม่สามารถหาคำตอบได้เนื่องจากจำนวนดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกิน

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยหาความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกิดจากการยกกำลังของ $e$ และ $\pi$ สลับกัน มีฐานเป็น $e$ และ $\pi$ ใครมีค่ามากกว่า พร้อมทั้งพิสูจน์และวิเคราะห์ผลการวิจัยที่เกิดขึ้น

## วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มีหลักการ ดังต่อไปนี้

ให้ $P(n)$ แทนข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

1. $P(1)$ เป็นจริง
2. ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง และแสดงได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้วจะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$

เพื่อความสะดวกในการเขียน ผู้วิจัยขอนิยามสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 1 :** นิยามสัญลักษณ์ $x^{\left[y^x\right]_n}$ แทนด้วย $x^{y^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{y^x}}}}}}$ โดยมีชุดของ $y^x$ ทั้งหมด $n$ ชุด

ตัวอย่าง

(1) $e^{\left[\pi^e\right]_2}$ หมายถึง $e^{\pi^{e^{\pi^e}}}$

(2) $\pi^{e^{\left[\pi^e\right]_2}}$ หมายถึง $\pi^{e^{\pi^{e^{\pi^e}}}}$

**บทนิยาม 2 :** นิยามความยาวของจำนวนยกกำลัง หมายถึง จำนวนของตัวที่ยกกำลังทั้งหมดรวมกับตัวฐานด้วย

ตัวอย่าง

(1) $e^{\left[\pi^e\right]_2}$ หมายถึง $e^{\pi^{e^{\pi^e}}}$ มีความยาวคือ 5

(2) $\pi^{e^{\left[\pi^e\right]_2}}$ หมายถึง $\pi^{e^{\pi^{e^{\pi^e}}}}$ มีความยาวคือ 6

## ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ผู้วิจัยได้พบผลลัพธ์ในกรณีที่มีความยาว 3 และ 4 อีกทั้งยังได้แสดงการพิสูจน์ ดังทฤษฎีบท 2

**ทฤษฎีบท 2:** ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $\pi^{e^\pi} > e^{\pi^e}$

(2) $e^{\pi^{e^\pi}} > \pi^{e^{\pi^e}}$

**บทพิสูจน์**

(1) จากทฤษฎีบท 1 พบว่า $e^\pi > \pi^e$ และเนื่องจาก $\pi > e$ จึงได้ว่า $\pi^{e^\pi} > e^{\pi^e}$

(2) จาก $e^\pi > \pi^e$ จะได้ว่า $\ln e^\pi > \ln \pi^e$ นั่นคือ $\pi \ln e > e \ln \pi$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\dfrac{\pi}{e} > \dfrac{\ln \pi}{\ln e}$

เนื่องจาก $\dfrac{\pi}{e} > 1$ และ $e^\pi > \pi^e$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\frac{\pi^{e^\pi}}{e^{\pi^e}} > \frac{\pi^{e^\pi}}{e^{e^\pi}} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^{e^\pi} > \frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$$

เมื่อพิจารณาพบว่า $\pi^{e^{\pi}} \ln e > e^{\pi^{e}} \ln \pi$ และทำให้ได้ว่า $\ln e^{\pi^{e^{\pi}}} > \ln \pi^{e^{\pi^{e}}}$

ดังนั้น $e^{\pi^{e^{\pi}}} > \pi^{e^{\pi^{e}}}$

ผู้วิจัยได้ใช้ผลลัพธ์จากทฤษฎีบท 2 ขยายไปสู่กรณีทั่วไปโดยใช้ตามหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังทฤษฎีบท 3

**ทฤษฎีบท 3:** สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

(1) $\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{n}} > e^{\left[\pi^{e}\right]^{n}}$

(2) $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{n}}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{n}}}$

**บทพิสูจน์** ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{n}} > e^{\left[\pi^{e}\right]^{n}}$ และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{n}}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{n}}}$

พิจารณา $n=1$ ได้ว่า $P(1)$ แทนข้อความ

$\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{1}} > e^{\left[\pi^{e}\right]^{1}}$ และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{1}}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{1}}}$

นั่นคือ $\pi^{e^{\pi}} > e^{\pi^{e}}$ และ $e^{\pi^{e^{\pi}}} > \pi^{e^{\pi^{e}}}$

ซึ่งเป็นจริงจากทฤษฎีบท 2

ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{k}} > e^{\left[\pi^{e}\right]^{k}}$

และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{k}}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{k}}}$

จาก $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{k}}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{k}}}$ และ $\pi > e$ ทำให้

ได้ว่า $\pi^{e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{k}}}} > e^{\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{k}}}}$

ซึ่งได้ว่า $\pi^{\left[e^{\pi}\right](k+1)} > e^{\left[\pi^{e}\right](k+1)}$

จาก $e^{\pi} > \pi^{e}$ แล้ว $\ln e^{\pi} > \ln \pi^{e}$

จะได้ว่า $\pi \ln e > e \ln \pi$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{e} > 1$ และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]^{k}}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]^{k}}}$

ดังนั้น

$$\frac{\pi^{\left[e^{\pi}\right](k+1)}}{e^{\left[\pi^{e}\right](k+1)}} > \frac{\pi^{\left[e^{\pi}\right](k+1)}}{e^{\left[e^{\pi}\right](k+1)}} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^{\left[e^{\pi}\right](k+1)}$$

$$> \frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\pi^{\left[e^{\pi}\right](k+1)} \ln e > e^{\left[\pi^{e}\right](k+1)} \ln \pi$

นั่นคือ $\ln e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right](k+1)}} > \ln \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right](k+1)}}$

ดังนั้น $e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right](k+1)}} > \pi^{e^{\left[\pi^{e}\right](k+1)}}$

ในงานวิจัยที่ศึกษามา ผู้วิจัยพบว่ามีพิสูจน์เฉพาะกรณี $e^{\pi} > \pi^{e}$ เท่านั้น ซึ่งมีวิธีการหาคำตอบที่หลากหลาย ดังเช่นใน (Schlumberger,1985) พิสูจน์โดยใช้อสมการ $e^{x} > \left(1+\frac{x}{y}\right)^{y}$ โดยแทนค่า $x=\pi-y$ และจัดรูปอสมการซึ่งจะได้ว่า $e^{\pi} > \pi^{e}$ และมีการพิสูจน์ในรูปแบบอื่นอีกมากมายในเอกสารอ้างอิงใน (Mirzodaler, 2016) ได้มีการพิสูจน์โดยพิจารณาฟังก์ชัน $y=\frac{\ln x}{x}$ และดูกราฟของฟังก์ชันดังกล่าวเพื่อเปรียบเทียบค่าระหว่าง $\frac{1}{e}$ และ $\frac{\ln \pi}{\pi}$ ซึ่งได้กล่าวไปแล้วในทฤษฎีบท 1 รวมถึงยังมีการพิสูจน์โดยพิจารณา $e^{x} > 1+x$ โดยแทนค่า $x=\frac{\pi}{e}-1$ ซึ่งจะได้ว่า $e^{\pi} > \pi^{e}$ เช่นเดียวกันอีกทั้งยังสามารถหาคำตอบของปัญหา

ดังกล่าวโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส โดยการพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x^{1/x}$ และหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันซึ่งคือ $f'(x)=x^{1/x}\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$ เนื่องจาก $\ln x>1$ สำหรับทุก $x>e$ และ $f'(x)<0$ สำหรับทุก $e<x<\pi$ ดังนั้น $\pi^{1/\pi}>e^{1/e}$ และได้ว่า $e^{\pi}>\pi^{e}$ ดูได้ใน (Talwalkar, 2013; Fialok, 2017)

จากการศึกษาข้างต้นทำให้ผู้วิจัยทราบว่ายังไม่มีงานวิจัยที่กล่าวถึงการเปรียบเทียบค่าของ $\pi^{e^{\pi}}$ และ $e^{\pi^{e}}$ รวมถึงกรณีทั่วไปของรูปแบบข้างต้น ผู้วิจัยได้นำเสนอรูปแบบการพิสูจน์ที่กล่าวไปแล้วในทฤษฎีบท 2 และทฤษฎีบท 3

ผู้วิจัยวิเคราะห์ผลการวิจัยที่ได้ในทฤษฎีบท 3 โดยแยกการวิเคราะห์เป็น 2 กรณี โดยแบ่งเป็นความยาวเป็นจำนวนคู่ และความยาวเป็นจำนวนคี่ ดังนี้

(1) จาก $e^{\pi}>\pi^{e}$ ทำให้ได้ว่า $\ln e^{\pi}>\ln \pi^{e}$ ได้ว่า $\pi\ln e>e\ln\pi$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\dfrac{\pi}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\ln e}$ ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีการยกกำลังระหว่าง $e$ และ $\pi$ สลับกันโดยมีความยาวเป็นจำนวนคี่

$$\frac{\ln\pi}{\ln e}<\frac{\pi}{e}<\frac{\pi^{e^{\pi}}}{e^{\pi^{e}}}<\cdots<\frac{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}<\cdots$$

และเมื่อพิจารณา $n\to\infty$ พบว่า

$$\frac{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}>\frac{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}{e^{\left[e^{\pi}\right]_n}}=\left(\frac{\pi}{e}\right)^{[e^{\pi}]_n}\to\infty$$

นั่นคือจะได้ว่า $\dfrac{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}\to\infty$ เมื่อ $n\to\infty$

จากการใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่าสามารถเปรียบเทียบค่าอัตราส่วนดังกล่าวข้างต้นได้ดังตารางที่ 1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นจริง

**ตารางที่ 1** ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนระหว่างเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น $e$ และ $\pi$ โดยมีความยาวเป็นจำนวนคี่

| ข้อมูล | ค่าของข้อมูล |
|---|---|
| $\dfrac{\ln\pi}{\ln e}$ | 1.144729 |
| $\dfrac{\pi}{e}$ | 1.155727 |
| $\dfrac{\pi^{e^{\pi}}}{e^{\pi^{e}}}$ | 56.299447 |
| $\dfrac{\pi^{e^{\pi^{e^{\pi}}}}}{e^{\pi^{e^{\pi^{e}}}}}$ | $10^{10^{10^{11.142177}}}$ |

(2) ทำนองเดียวกัน พบว่า ความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีการยกกำลังระหว่าง $e$ และ $\pi$ สลับกันโดยมีความยาวเป็นจำนวนคู่

$$\frac{\ln\pi}{\ln e}>\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}>\frac{\pi^{e^{\pi^{e}}}}{e^{\pi^{e^{\pi}}}}>\cdots>\frac{\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}}{e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}}>\cdots>0$$

และจะได้ว่า $\dfrac{\pi^{e^{\left[\pi^{e}\right]_n}}}{e^{\pi^{\left[e^{\pi}\right]_n}}}\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$

จากการใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่า พิจารณาค่าของข้อมูลดังตารางที่ 2 จะเห็นว่าสอดคล้องกับความสัมพันธ์ข้างต้น

**ตารางที่ 2** ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนระหว่างเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น $e$ และ $\pi$ โดยมีความยาวเป็นจำนวนคู่

| ข้อมูล | ค่าของข้อมูล |
|---|---|
| $\dfrac{\ln\pi}{\ln e}$ | 1.144729 |
| $\dfrac{\pi^e}{e^\pi}$ | 0.970548 |
| $\dfrac{\pi^{e^{\pi^e}}}{e^{\pi^{e^\pi}}}$ | ค่าของข้อมูลมีค่าน้อยมาก ไม่สามารถแสดงได้ |
| $\dfrac{\pi^{e^{\pi^{e^{\pi^e}}}}}{e^{\pi^{e^{\pi^{e^\pi}}}}}$ | ค่าของข้อมูลมีค่าน้อยมาก ไม่สามารถแสดงได้ |

## สรุป

ในงานวิจัยดังกล่าวได้ตอบคำถามเกี่ยวกับการยกกำลังของ $e$ และ $\pi$ สลับกันโดยมีฐานที่ $e$ และ $\pi$ จำนวนใดมีค่ามากกว่า ซึ่งพบว่า หากมีจำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคี่พบว่าจำนวนที่มีฐานเป็น $\pi$ จะมีค่ามากกว่า แต่ถ้าจำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคู่พบว่าจำนวนที่มีฐานเป็น $e$ จะมีค่ามากกว่า

ในการวิจัยดังกล่าว พบความสัมพันธ์ของอัตราส่วนกรณีที่ความยาวเป็นจำนวนคี่

$$\frac{\ln\pi}{\ln e} < \frac{\pi}{e} < \frac{\pi^{e^\pi}}{e^{\pi^e}} < \cdots < \frac{\pi^{\left[e^\pi\right]_n}}{e^{\left[\pi^e\right]_n}} < \cdots$$

และ $\dfrac{\pi^{\left[e^\pi\right]_n}}{e^{\left[\pi^e\right]_n}} \to \infty$ เมื่อ $n \to \infty$

ความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีความยาวเป็นจำนวนคู่

$$\frac{\ln\pi}{\ln e} > \frac{\pi^e}{e^\pi} > \frac{\pi^{e^{\pi^e}}}{e^{\pi^{e^\pi}}} > \cdots > \frac{\pi^{e^{\left[\pi^e\right]_n}}}{e^{\pi^{\left[e^\pi\right]_n}}} > \cdots > 0$$

และ $\dfrac{\pi^{e^{\left[\pi^e\right]_n}}}{e^{\pi^{\left[e^\pi\right]_n}}} \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิของบทความนี้ทุกท่านที่ได้เสนอแนะอันเป็นประโยชน์สำหรับการปรับปรุงบทความนี้

ชนิตา เรืองกิจไพบูลย์ ขอขอบคุณโครงการ พสวท. ศูนย์มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่ได้สนับสนุนให้ผู้วิจัยได้ทำงานวิจัยในภาคฤดูร้อน

## เอกสารอ้างอิง

Fialok, S. 2017. **Which is larger, $e^\pi$ or $\pi^e$ ?.** B. Tech. Information Technology, Indian Institute of Information Technology, Allahabad. Available Source: https: / / www. quora. com/ Which-is-larger-e-% CF% 80-or-% CF% 80-e, September 1, 2017.

Mirzodaler. 2016. **Comparing $\pi^e$ and $e^\pi$ without calculating them.** Available Source: https: / / math. stackexchange. com/ questions/ 7892 comparing-pie-and-e-pi-without-calculating-them, July 5, 2016.

Nakhli, F. 1987. Proof without words $\pi^e < e^\pi$. **Mathematics Magazine** 60(3): 165-165.

Schlumberger, N. 1985. An instant proof $e^\pi > \pi^e$. **College Mathematics Journal** 16(4): 280-280.

Talwalkar, P. 2013. **Monday puzzle: what is greater:** $e^\pi > \pi^e$? **.** Available Source: https://mindyourdecisions.com/blog/2013/08/05/monday-puzzle-what-is-greater-epi-or-pie/, July 15, 2016.